Sistemi linearnih jednačina

Gausova metoda
Kramerova metoda

GAUSOVA METODA

Dat je sistem od *n* linearnih jednačina sa *n* nepoznatih (sličan je pristup i kada broj jednačina i nepoznatih nije isti):

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Gausova metoda se sastoji u postepenom eliminisanju nepoznatih iz sistema.

Tako se polazni sistem pomoću elementarnih transformacija svodi na trougaoni sistem koji je ekvivalentan datom:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Elementarne transformacije su:

- zamena mesta jednačina
- množenje jedne jednačine nekim brojem (različitim od nule) i potom njeno dodavanje nekoj drugoj jednačini sistema u cilju eliminacije neke nepoznate.

Primer 1: Gausovom metodom rešiti sistem jednačina:

$$x+2y-3z=-4$$
$$2x-y+z=3$$
$$-2x+y+2z=6$$

Rešenje:

Nakon množenja prve jednačine sa −2 i 2 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$x+2y-3z=-4$$
$$-5y+7z=11$$
$$5y-4z=-2$$

Dodavanjem druge jednačine trećoj dobijamo trougaoni sistem:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 4 \\
-5y + 7z &= 11 \\
3z &= 9
\end{aligned}
$$

Jednostavnim proračunom dobijamo da je:

$$(x, y, z) = (1,2,3)$$

Primer 2: Gausovom metodom rešiti sistem jednačina:

$$x + 2y + z = 10$$
$$2x + y + z = 6$$
$$10x - y + 3z = 2$$

Rešenje : Nakon množenja prve jednačine redom sa –2 i –10 i dodavanja respektivno drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$x + 2y + z = 10$$
$$2x + y + \quad z = 6$$
$$10x - y + 3z = 2$$

Množenjem druge jednačine sa –7 i dodavanjem trećoj dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x+2y+\ z &= \ 10 \\ -3y-z &= -14 \\ 0\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Ovo je neodređen sistem, koji ima beskonačno mnogo rešenja oblika:

$$\left(\frac{2-z}{3}, \frac{14-z}{3}, z\right), z \in R.$$

KRAMEROVA METODA

(Kramer 1704–1752)

Dat je sistem od 3 jednačine sa 3 nepoznate:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_n$$

Uočimo sledeće determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, tada sistem ima **jedinstveno rešenje:**

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}$$

- Ako je determinanta sistema $D = 0$, a bar jedna od determinanti

$$D_x \neq 0,\ D_y \neq 0,\ D_z \neq 0$$

sistem **nema rešenja.**

- Ako je determinanta sistema $D = 0$ i sve determinante

$$D_x = D_y = D_z = 0$$

sistem je **neodređen** i ima beskonačno rešenja.

Primer 3: Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x+3y-2z&=1\\ 2x-y+z&=3\\ x+2z&=7 \end{aligned}$$

Rešenje:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-13\neq 0 \quad D_x=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{vmatrix}=-13$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}=-26 \quad D_z=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 7\end{vmatrix}=-39$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-13}{-13}=1,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-26}{-13}=2,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-39}{-13}=3$$